Verständnis von Zusammenhängen im Analysisunterricht fördern

ANNIKA M. WILLE (ALPEN-ADRIA-UNIVERSITÄT KLAGENFURT)

Im Analysisunterricht begegnen Schülerinnen und Schülern unterschiedliche mathematische Zusammenhänge, beispielsweise wie analytische Begriffe miteinander in Beziehung stehen oder auch Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Interpretationen eines Begriffes. In diesem Beitrag wird die Unterscheidung zwischen relationalem und instrumentellem Verständnis nach Skemp (1976) auf die Analysis bezogen. Es werden Beispiele gezeigt, welche Lernschwierigkeiten auftreten können und wie relationales Verständnis im Analysisunterricht gefördert werden kann.

1. Zusammenhänge in der Analysis

Schülerinnen und Schüler stehen im Analysisunterricht vor der Aufgabe, unterschiedliche analytische Zusammenhänge zu erkennen und zu erklären, sowohl sprachlich als auch mit mathematischen Verschriftlichungen. Weigand (2015, S. 264) beschreibt, dass zum Verständnis eines mathematischen Begriffes der Begriffsinhalt gehöre, den Merkmale und Eigenschaften und deren Beziehungen ausmachen, der Begriffsumfang, der beschreibt, welche Objekte unter diesen Begriff fallen, das Begriffsnetz, das durch Beziehungen zwischen unterschiedlichen Begriffen entsteht, und Kenntnisse über Anwendungen sowie Fähigkeiten im Umgang mit dem Begriff. Ebenfalls gehöre die kritische Reflexion über Begriffsbildung dazu. Hier wird ersichtlich, dass an vielen Stellen Zusammenhänge eine wesentliche Rolle spielen: sei es der Zusammenhang zwischen Merkmalen und Eigenschaften, der Zusammenhang zwischen Objekten, die zu einem Begriff zusammengefasst werden können, der Zusammenhang zwischen Begriffen und der Zusammenhang eines Begriffes zu Anwendungen dieses Begriffes. In der Schulanalysis sind zu lernende Zusammhänge zwischen verschiedenen Begriffen beispielsweise der zwischen Differenzenquotient und Ableitung, bzw. zwischen Ableitung und Integral. Der Zusammenhang zwischen dem Differenzenquotienten, der Sekantensteigung, der mittleren Änderungsrate und der symbolischen Darstellung $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ist ein Beispiel für den Zusammenhang verschiedener Interpretationen eines Begriffes (vgl. Danckwerts & Vogel 2006, S. 57 und S. 85).

Schülerinnen und Schüler können diese Zusammenhänge auf verschiedene Weise verstehen. Skemp (1976) unterscheidet beispielsweise zwischen *instrumentellem* und *relationalem Verständnis*, wobei er ersteres als „rules without reasons“ beschreibt und letzteres als „knowing both what to do and why“ (ebd., S. 21). Dieses „why“, bzw. „Warum“, wird im Folgenden im Fokus stehen. Ein Beispiel für instrumentelles Verständnis in der Schulanalysis ist, wenn eine Schülerin oder ein Schüler zwar die Ableitung einer Polynomfunktion mit Ableitungsregeln ausrechnen kann, jedoch nicht weiß, was die Ableitung ist. Dagegen gehört zum relationalem Verständnis nicht nur das Ableiten mit Ableitungsregeln, sondern zusätzlich die Fähigkeit, beispielsweise mit Hilfe des Steigungsbegriffes erklären zu können, wie die Ableitung mit dem Differenzenquotienten zusammenhängt.

Skemp verwendet eine Metapher, die beide Arten von Verständnis veranschaulicht: Wenn jemand neu in einer Stadt ist, hieße instrumentelles Verständnis nach einem festen Plan von Ort A nach Ort B zu gelangen. Dies sei schnell zu lernen, aber unflexibel. Dagegen entspricht in diesem Beispiel der Aufbau von relationalem Verständnis, durch die Stadt zu gehen, um ein *mentales Straßennetz*, bzw. eine *mentale Straßenkarte* aufzubauen. Dies sei zeitaufwändiger, aber dafür flexibler. Zu beachten ist, dass beide Stadtbesucher durch die Stadt gehen, also sich nicht nur etwas über die Stadt erzählen lassen und diese Erzählung wiederholen. Die Ziele sind jedoch unterschiedlich: Der eine möchte schnell zu Ort B gelangen, der andere möchte etwas über Zusammenhänge in der Stadt erfahren. Übertragen auf den Analysisunterricht bedeutet dies, dass ein Lernender, der instrumentelles Verständnis aufbaut, ebenso wie ein Lernender, der relationales Verständnis entwickelt, mit mathematischen Verschriftlichungen umgeht, wie beispielsweise mit Termen, Gleichungen und Graphen. Relationales Verständnis aufzubauen erfordert jedoch, dass nach und nach ein „mentales Straßennetz der Schulanalysis“ entsteht, indem die oben genannten Zusammenhänge vom Lernenden hergestellt, erkannt und erklärt werden.[1]

Wie kann nun der Unterricht gestaltet werden, um den Aufbau einer „schulanalytischen mentalen Straßenkarte" zu fördern? Eine Möglichkeit ist, Reflexionen über den „gegangenen Weg" und dessen Verbindungen zu anderen anzustoßen. Dies kann durch Warum-Fragen an die Schülerinnen und Schüler geschehen, wie beispielsweise, warum es in der Ableitung eine Nullstelle gibt, wenn in der Funktion ein Extremum ist, warum die Integralfunktion etwas über den orientierten Flächeninhalt aussagt oder auf welche Weise Funktionsgraphen, Terme und Gleichungen zusammenhängen.

2. Ein Projekt zur Analysis mit erdachten Dialogen

In den Schuljahren 2016/2017 und 2017/2018 wurde in einem Projekt der Autorin eine Methode untersucht, die Reflexionsprozesse zum Aufbau von relationalem Verständnis in der Analysis anstoßen sollte. Die Methode sollte den Lernenden ermöglichen, verbale Warum-Fragen stellen und beantworten zu können. Ebenso sollten sie auch mathematische Terme, Gleichungen, Tabellen und Graphen aufschreiben, umformen und in Beziehung setzen können. Und schließlich sollte es eine Einzelarbeit sein, damit die Lehrkraft jede Schülerin und jeden Schülerin im Blick nehmen konnte. Diese Anforderungen werden von der Methode der erdachten Dialoge erfüllt, die im Folgenden ausgeführt wird.

2.1. Erdachte Dialoge im Mathematikunterricht

Ein *erdachter Dialog* (siehe Abb. 1) ist eine schriftliche Einzelarbeit einer Schülerin oder eines Schülers. Der Lernende schreibt dabei einen Dialog zwischen zwei Protagonisten auf, die sich über eine mathematische Fragestellung unterhalten (Wille 2008, 2009, 2017a). Ein leichter Einstieg kann geschaffen werden, wenn ein Anfangsdialog vorgegeben wird, den jeder einzelne fortsetzen soll (Wille 2007b).

Ein erdachter Dialog ist die schriftliche Fassung einer gedachten mündlichen Unterhaltung. Daher enthält er sowohl mündliche als auch schriftliche Aspekte. Bei dem Dialog in Abbildung 1 ist dies gut zu erkennen. Die schriftliche Form ermöglicht es der Schülerin, Formeln aufzuschreiben oder Terme umzuformen. Gleichzeitig kann sie dies aber auch kommentieren, wie beispielsweise mit der Erklärung:

> „Genau, stell dir ein Steigungsdreieck mit 1 rüber und k rauf. Damit ich zum Punkt x_1 komme, brauch ich das $+$ ein Stückerl, das man k nennt."

Diese Sätze zeigen, obwohl sie geschrieben sind, einen hohen Grad an konzeptioneller Mündlichkeit (vgl. Koch & Österreicher 1985) auf, da hier ein Protagonist etwas zum anderen „sagt".

Die Dialogform hat eine weitere Folge: Beim Schreiben eines erdachten Dialogs befragt sich die Schülerin oder der Schüler selbst und antwortet auch auf sich selbst. Das ermöglicht, dass der Schreibende Warum-Fragen stellt und diese zu beantworten versucht. Es können auf diese Weise Lerngelegenheiten zum Aufbau von relationalem Verständnis entstehen. Ist es der Lehrkraft wichtig, dass die Schülerinnen und Schüler sich mit einer speziellen Warum-Frage beschäftigen, so kann diese Frage bereits im Anfangsdialog gestellt werden. In der Regel greift ein Schreibender die Fragen des Anfangsdialoges auf.

Da das Schreiben eines erdachten Dialoges eine Einzelarbeit ist, erhält die Lehrkraft einen Einblick in die mathematischen Vorstellungen und Fähigkeiten jeder einzelnen Schülerin, bzw. jedes einzelnen Schülers. Teile von erdachten Dialogen können schließlich wieder in den Unterricht mit einfließen, zum Beispiel, indem mit ihrer Hilfe Lernschwierigkeiten angesprochen werden, oder auch, indem eine gute Erklärung in der Sprache der Schülerinnen und Schüler an einen Merksatz der Lehrkraft anknüpft.

Als Anlässe für einen erdachten Dialog sind zum einen Reflexionen in Sicherungsphasen möglich. Zum anderen kann ein erdachter Dialog auch bei der Erarbeitung eines neuen Lerninhaltes eingesetzt wer-

[1] Das Verständnis von Mathematik, bzw. von mathematischen Begriffen wurde in der Literatur auf unterschiedliche Weise thematisiert: So unterscheidet beispielsweise Sfard (2008) „talking about objects" und „talking about processes". Andere Unterscheidungen zwischen prozeduralem und konzeptionellem (oder operationellem und strukturellem) Verständnis werden beispielsweise bei Hiebert & Lefevre (1986) und Gray & Tall (1994) ausgeführt. Um genauer die Warum-Fragen der Lernenden zu betrachten, stehen im Folgenden Skemps Unterscheidung und seine Metapher des mentalen Straßennetzes im Fokus.

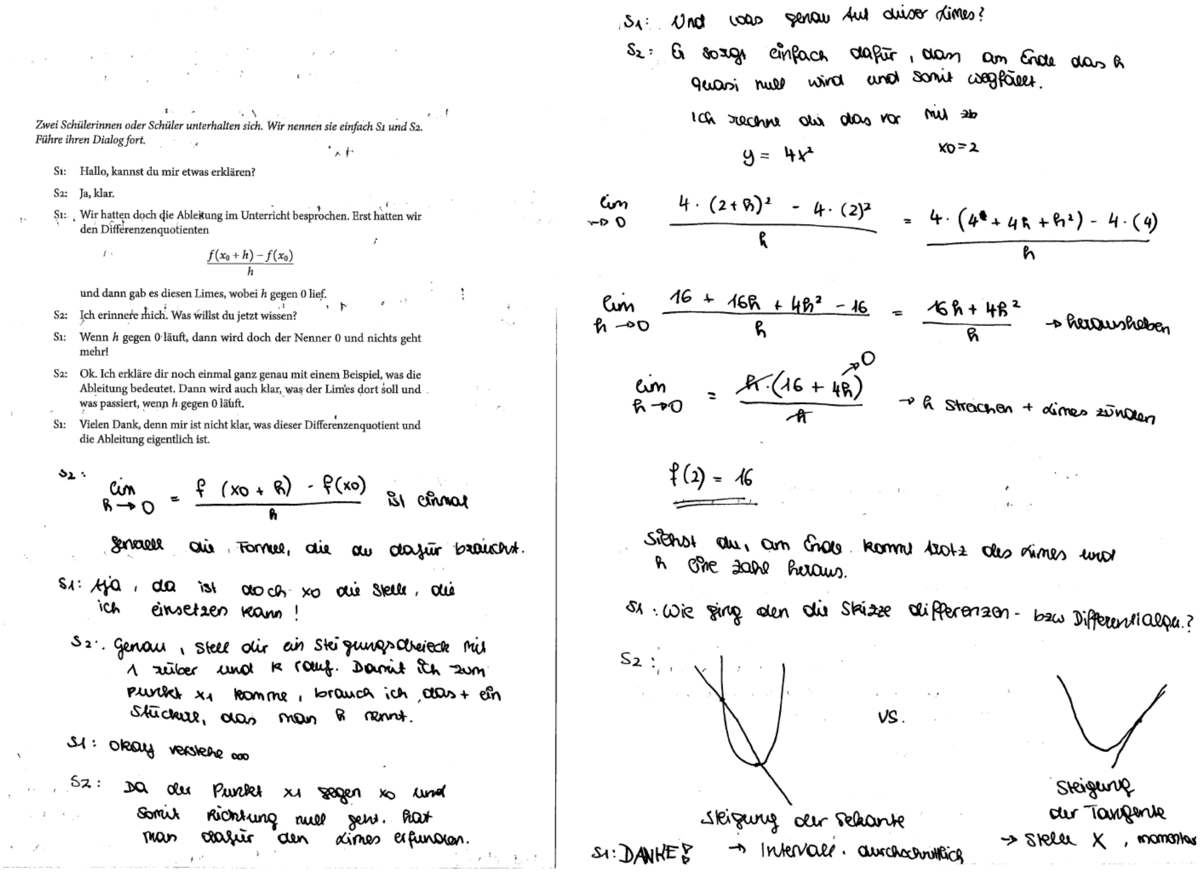


Abbildung 1: Der erdachte Dialog einer Schülerin einer 11. Jahrgangsstufe.

den, indem sich zunächst jede und jeder als Einzelarbeit mit einer Fragestellung beschäftigt (vgl. Wille (2017b) für Beispiele von Anfangsdialogen zum Reflektieren und Erarbeiten, die an den eigenen Unterricht angepasst werden können).

2.2. Das Projekt in den Schuljahren 2016/2017 und 2017/2018

Im Schuljahr 2016/2017 an einem Gymnasium in Graz und im Schuljahr 2017/2018 an einem Gymnasium in Villach wurden erdachte Dialoge im Analysisunterricht in insgesamt vier Klassen der Jahrgangsstufe 11 und einer Klasse der Jahrgangsstufe 12 eingesetzt. Dabei passten die Lehrerinnen und Lehrer verschiedene Vorlagen von Anfangsdialogen an Ihren Unterricht an, wie beispielsweise die folgende:

> *Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.*
>
> S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?
> S2: Ja, natürlich. Was möchtest du wissen?
> S1: Wir hatten doch im Unterricht .... besprochen. Was genau sollte das sein? Und ich meine jetzt nicht allein, wie ich es rechne.
> S2: Am besten zeige ich dir ein Beispiel. Daran kann ich es gut erklären.
> S1: Vielen Dank! Sei aber gefasst darauf, dass ich viele Warum-Fragen stellen werde!

Diese Vorlage wurde von einem Lehrer für seinen Unterricht auf die folgende Weise angepasst:

> *Zwei Schülerinnen oder Schüler unterhalten sich. Wir nennen sie einfach S1 und S2. Führe ihren Dialog fort.*

S1: Hallo, kannst du mir etwas erklären?
S2: Ja, natürlich. Was möchtest du wissen?
S1: Wir hatten doch im Unterricht den Differenzenquotienten in unterschiedlichen Anwendungsaufgaben besprochen. Ich kann ihn immer ausrechnen. Aber ihn dann im Kontext interpretieren und die richtigen Einheiten verwenden, da mache ich immer Fehler.
S2: Eigentlich kommt es da immer nur auf einige Schlüsselwörter drauf an, die Einheit des Ergebnisses kann man sich auch ganz leicht überlegen. Am besten zeige ich dir ein Beispiel. Daran kann ich es gut erklären.
S1: Vielen Dank! Sei aber gefasst darauf, dass ich viele Warum-Fragen stellen werde!

In allen Klassen bis auf eine Klasse der 11. Jahrgangstufe beantworteten die Schülerinnen und Schülerinnen, nachdem sie ihren erdachten Dialog geschrieben hatten, zusätzlich die Frage: „Was ist mir während des Schreibens dieses Dialoges bewusst geworden?“

In diesem Artikel sind die erdachten Dialoge einer Klasse der 11. Jahrgangsstufe im Fokus, welcher der oben genannte Anfangsdialog zum Differenzenquotienten zur Fortsetzung gegeben wurde. Aus dieser Klasse setzten 17 Schülerinnen und Schüler den Anfangsdialog fort.

Die erdachten Dialoge der Schülerinnen und Schüler wurden mit gemischt deduktiv-induktiver Kategorienbildung (vgl. Mayring 2010) auf drei Fragestellungen hin analysiert, *welche Warum-Fragen die Schülerinnen und Schüler stellen, welche Teildialoge Hinweise auf instrumentelles und relationales Verständnis geben* und *welche Lernschwierigkeiten sichtbar werden.* Die Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler wurden mittels induktiver Kategorienbildung und der Fragestellung, *was den Schülerinnen und Schülern während des Schreibens bewusst wurde*, untersucht.

3. Einblicke in die erdachten Dialoge der Schülerinnen und Schüler

Im Folgenden werden Einblicke in die erdachten Dialoge und Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler bezüglich der oben genannten Fragen gegeben. Dabei kann nicht angegeben werden, ob es sich jeweils um den Text einer Schülerin oder eines Schülers handelt, da die Autorin die Texte in anonymisierter Form erhielt. Es wird daher der Begriff „Lernender“ sowohl für eine Schülerin als auch einen Schüler verwendet.

3.1. Warum-Fragen

Alle Schülerinnen und Schüler dieser Klasse bis auf zwei stellen in ihrem erdachten Dialog explizite Warum-Fragen oder sie verfassen Erklärungen, die als Antworten auf Warum-Fragen verstanden werden können. Bezogen auf Skemps Metapher des „mentalen Straßennetzes“ nennen die Schülerinnen und Schüler Warum-Fragen, die sich vor allem auf „Orte der Karte“ beziehen, zum Teil in Abgrenzung zu anderen „Orten“. Andere Warum-Fragen beziehen sich hauptsächlich auf „Straßen“, bzw. „Wege der Karte“, indem ein konkreter Weg abgeschritten und dabei erklärt wird.

Zu Warum-Fragen, die vor allem Orte betreffen, gehören Warum-Fragen, die sich auf Begriffsklärungen beziehen. Beispielsweise schreibt ein Lernender (siehe Abb. 2, links, für den handgeschriebenen Dialog[2]):

„S1: Gut, ich habe soweit alles verstanden, bis auf das letzte. Warum wird er mittlere Änderungsr. und nicht nur Änderungsr. genannt?
S2: Weil, er nur (sozusagen) den Durchschnitt bzw. Mittelwert von etw. bestimmtes angibt und nur Änderungsrate hinzuschreiben wäre ein großer Fehler, da man hier schon vom Differentialquotienten spricht.
S1: Ah ok. Ja, das ist nun verständlich.“

[2] Etwaige orthographische Fehler in den erdachten Dialogen und in den schriftlichen Rückmeldungen wurden nicht korrigiert.

In diesem Dialog wird mit der Warum-Frage der Begriff „mittlere Änderungsrate“ dem Begriff „Änderungsrate“ kontrastierend gegenübergestellt und auch die Begriffe „Durchschnitt“, „Mittelwert“ und „Differentialquotient“ eingeordnet. Dabei wird kein konkreter „Weg beschritten“, beispielsweise durch Umformen von Termen oder durch Manipulationen von Graphen.

In anderen Dialogen geht es ebenso um Begriffsklärung, jedoch wird nicht in erster Linie ein anderer „Ort“ wie der Differentialquotient gegenübergestellt, sondern der „Ort“ selbst wird näher erkundet, indem es um die Frage geht, warum sich die mittlere Änderungsrate oder der Differenzenquotient auf einen Zeitraum bezieht und nicht auf einen Zeitpunkt. Ein Lernender (siehe Abb. 2, rechts) schreibt:

> „S1: Aber warum berechnen wir die mittlere Änderung der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitraum und nicht zu einem gewissen Zeitpunkt?
> S2: Bei einem Differenzenquotient handelt es sich immer um einen Zeitraum. Wen man etwas zu einen bestimmten Zeitpunkt wissen möchte, muss man den Differentialquotient berechnen.“

Die Antwort auf die Warum-Frage bezieht sich hier nur auf den Differenzenquotienten, bei dem es sich „immer um einen Zeitraum“ handelt, ohne ausreichend das Warum zu klären. Insbesondere wird kein „Weg beschritten“. Wie dies möglich ist, kann bei einem anderen Dialog beobachtet werden: Zunächst wird im Dialog eine konkrete Durchschnittsgeschwindigkeit mit Hilfe des Differenzenquotienten $\frac{5\cdot 4^2-5\cdot 1^2}{3}$ bei einem selbstgewählten Beispiel berechnet (siehe Abb. 4). Im weiteren Verlauf des Dialoges beziehen sich die Protagonisten bei der Beantwortung einer Warum-Frage auf diese Berechnung (siehe Abb. 2, unten):

> „S2: Nehmen wir wieder unser Beispiel mit den Bungee-Jumper. Der Differenzenquotient beträgt 25 m/s d.h. dass er im Mittel 25 Meter pro Sekunde zurücklegt.
> S1: Warum?
> S2: Weil das Ergebnis sich nicht um einen Zeitpunkt handelt. Wir dividieren einen Weg durch eine Zeitspanne: keinen Zeitpunkt und deshalb spricht man vom Durchschnitt.
> S1: Beim Differenzenquotienten wird das ganze Zeitintervall abgedeckt und deshalb spricht man vom Durchschnitt oder?
> S2: Genau. Der Springer legt in den einzelnen Sekunden nicht den gleichen Weg zurück.
> S1: Jetzt versteh ich den Differenzenquotienten. Vielen Dank für deine Hilfe
> S2: Kein Problem. War mir ein Vergnügen.“

In einem weiteren erdachten Dialog wird nicht ein Begriff einem anderen gegenübergestellt, sondern in Verbindung gebracht. Ein Lernender schreibt:

> „S1: Wir haben den Differenzenquotienten auch geometrisch gedeutet und dabei hat unser Lehrer gesagt, dass der Differenzenquotient gleich der Steigung der Sekantenfunktion ist. Aber warum und was bedeutet das eigentlich?“

Im weiteren Verlauf (siehe Abb. 3) wird diese Frage ausführlich mit Hilfe von Termen und Graphen beantwortet. Im Sinne der Metapher wird also ein „Ort“, der Differenzenquotient, verbunden mit einem anderem „Ort“, der Steigung der Sekantenfunktion, indem „Wege beschritten werden“, also konkret mit mathematischen Verschriftlichungen umgegangen wird, und diese erläutert werden.

Bei einem anderen Teil von Warum-Fragen der Schülerinnen und Schüler geht es vor allem um die „Wege“ im „mentalen Straßennetz“. In einem erdachten Dialog wird beispielsweise ein konkretes Ausrechnen hinterfragt:

> „Warum muss ich die zurückgelegten km mit einer Differenz berechnen?“

Die meisten Fragen dieser Art nehmen Bezug auf die Einheiten und warum sie wie berechnet werden. So stellt beispielsweise ein Protagonist die Frage:

> „Warum konnte ich nicht statt °C/h, h/°C schreiben?“

S1: Gut, ich habe alles soweit verstanden, bis auf das Letzte. Warum wird er mittlere Änderungsr. und nicht nur Änderungr. genannt?

S2: Weil, er nur (sozusagen) den Durchschnitt bzw. Mittelwert von etw. bestimmtes angibt und nur Änderungsrate hinzuschreiben wäre ein großer Fehler, da man hier schon vom Differentialquotie. spricht.

S1: Ah ok! Ja, das ist nun verständlich.

S1: Aber warum berechnen wir die mittlere Änderung der Geschwindigkeit in einem gewissen Zeitraum und nicht zu einem gewissen Zeitpunkt?

S2: Bei einem Differenzenquotient handelt es sich immer um einen Zeitraum. Wenn man etwas zu einem bestimmten Zeitpunkt wissen möchte, muss man den Differentialquotient berechnen.

S2: Nehmen wir wieder unser Beispiel mit den Bungee-Jumper. ~~Die~~ Der Differenzenquotient beträgt 25 m/s d.h., dass er im Mittel 25 Meter pro Sekunde zurücklegt.

S1: Warum?

S2: Weil das Ergebnis sich nicht um einen Zeitpunkt handelt. Wir dividierten einen Weg durch eine Zeitspanne, keinen Zeitpunkt, und deshalb spricht man vom Durchschnitt.

S1: Beim Differenzenquotienten wird das ganze Zeitintervall abgedeckt, und deshalb spricht man vom Durchschnitt oder?

S2: Genau. Der Springer legt in den einzelnen Sekunden nicht den gleichen Weg zurück.

S1: Jetzt versteh ich den Differenzenquotienten. Vielen Dank für deine Hilfe

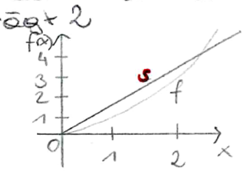
S2: Kein Problem. War mir ein Vergnügen.

Abbildung 2: Ausschnitte aus erdachten Dialogen, bei denen sich Warum-Fragen auf Begriffsklärungen beziehen.

S_1: Wir haben den Differenzenquotienten aber auch geometrisch gedeutet und dabei hat unser Lehrer gesagt, dass der Differenzenquotient gleich der Steigung der Sekantenfunktion ist. Aber warum und was bedeutet das eigentlich?

S_2: Die Steigung der Sekantenfunktion wird auch als mittlere Steigung von f in [a,b] bezeichnet. Im Intervall [a;b] kann die Steigung der Funktion N an manchen Stellen kleiner oder größer als die Steigung der Sekantenfunktion sein. IM MITTEL hat N jedoch in Intervall [a;b] die Steigung k der Sekantenfunktion.
Damit du es dir besser vorstellen kannst, machen wir wieder ein kurzes Beispiel:
Du hast die Funktion $f(x)=x^2$ (mit $x \in \mathbb{R}_0^+$)
Die Steigung von f an der Stelle 0 ist 0, nimmt aber mit wachsenden x zu.
Die mittlere Steigung im Intervall [0;2] beträgt 2

$\Rightarrow \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = 2$



Das ist die Steigung der Sekantenfunktion.
Die Vorzeichen des Differenzenquotienten verraten uns auch sehr viel über den Graph einer Funktion. Wenn das Vorzeichen >0, also positiv ist, so weiß man, dass f im Mittel in [a;b] steigt. Wenn der Differenzenquotient <0 ist, also negativ, so sagt man, dass f im Mittel in [a;b] fällt. Wenn der Differenzenquotient gleich 0 ist, so ist die Sekantenfunktion konstant, der Graph der Funktion muss aber dennoch nicht in [a;b] konstant sein.

S_1: Perfekt, ich habe alles verstanden. Danke für deine Zeit.

Abbildung 3: Ausschnitt aus einem erdachten Dialog, bei dem sich eine Warum-Frage auf den Zusammenhang zwischen Differentialquotient und Steigung der Sekantenfunktion bezieht.

3.2. Zum instrumentellen und relationalen Verständnis

Welche Teildialoge geben nun Hinweise auf instrumentelles oder relationales Verständnis? Instrumentelles Verständnis bedeutet im Sinne von Skemps Metapher, dass mit Hilfe eines festen Plans ein Weg gegangen wird, ohne Warum-Fragen beantworten zu können. Wenn man nun die erdachten Dialoge der Schülerinnen und Schüler betrachtet, so kann natürlich nicht aus dem Fehlen der Beantwortung einer Warum-Frage geschlossen werden, dass der Schreibende dazu nicht fähig wäre. Dennoch gibt die Art und Weise, wie ein Thema besprochen wird, einen Hinweis darauf, ob bei einer Erklärung eher das instrumentelle Verständnis oder das relationale Verständnis eine größere Rolle spielt. So können solche Stellen als Hinweis auf relationales Verständnis verstanden werden, an denen eine Schülerin oder ein Schüler nicht nur eine „Anleitung“ erklärt, wie etwas auszurechnen ist, sondern wenn die Protagonisten zusätzlich Zusammenhänge zwischen beispielsweise mathematischen Verschriftlichungen, verschiedenen Begriffen oder unterschiedlichen Darstellungen erläutern.

Zwei Teildialoge lassen den Unterschied zwischen reiner Anleitung und Anleitung mit Erklärung von Zusammenhängen gut erkennen. Beide Lernende beschäftigen sich mit der Frage der Einheitenberechnung. Beide beginnen auch mit einer Wie-Frage, jedoch unterscheiden sich ihre Antworten. Im ersten Teildialog wird die Frage nach der Einheitenberechnung auf die folgende Weise beantwortet:

> „Du nimmst die y-Achse durch die x-Achse. Wenn wir zu unserem vorherigen Beispiel zurückgehen, dann sind die km für Kilometer unsere y-Achse und die h für Stunde unsere x-Achse. Somit bekommst du die Einheit Kilometer pro Stunde => km/h.“

Diese Erklärung liest sich wie eine Anleitung, die zu der richtigen Einheit führt. Jedoch wird auch im weiteren Verlauf dieses Dialoges keine Warum-Frage dazu geklärt. Es ist beispielsweise aus der Erklärung nicht ersichtlich, warum es „die y-Achse durch die x-Achse“ sein muss und nicht etwa umgekehrt.

Im zweiten Teildialog eines anderen Lernenden (siehe Abb. 4) wird die Wie-Frage nach den Einheiten auf andere Weise beantwortet:

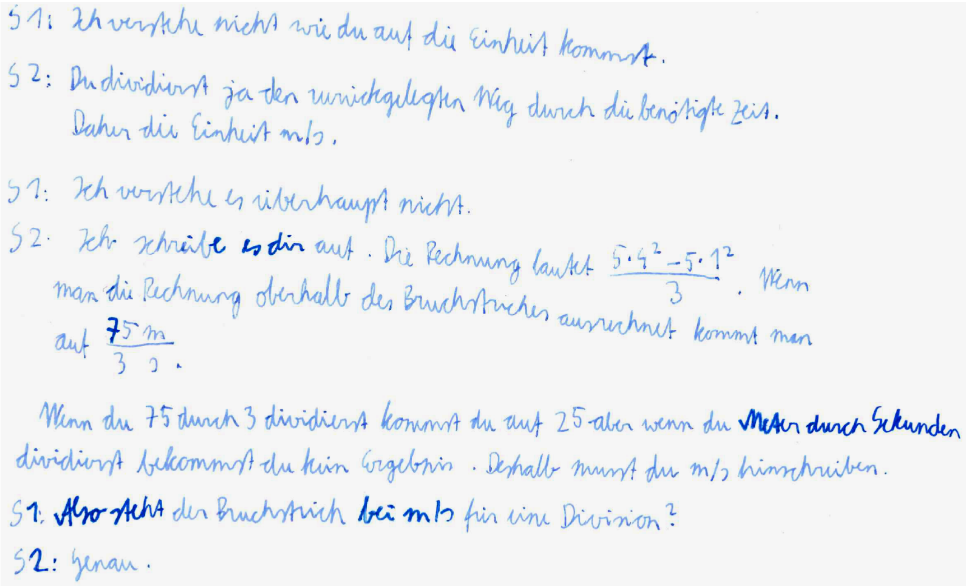
> „S1: Ich verstehe nicht wie du auf die Einheit kommst.
> S2: Du dividierst ja den zurückgelegten Weg durch die benötigte Zeit. Daher die Einheit m/s.
> S1: Ich verstehe es überhaupt nicht.
> S2: Ich schreibe es dir auf. Die Rechnung lautet $\frac{5 \cdot 4^2 - 5 \cdot 1^2}{3}$. Wenn man die Rechnung oberhalb des Bruchstriches ausrechnet kommt man auf $\frac{75\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}}$.
> S1: Wenn du 75 durch 3 dividierst kommst du auf 25 aber wenn du Meter durch Sekunden dividierst bekommst du kein Ergebnis. Deshalb musst du m/s hinschreiben.
> S2: Also steht der Bruchstrich bei m/s für eine Division?
> S1: Genau. (...)“

In diesem Dialog bezieht sich die Erklärung auf den konkreten Rechenweg bei der Ermittlung des Differenzenquotienten. Es ist also nicht nur eine Anleitung, wie die Einheit berechnet wird, sondern es wird auch erklärt, warum diese Vorgehensweise Sinn ergibt.

Ein anderes Beispiel, das als Hinweis auf relationales Verständnis gesehen werden kann, ist die oben erwähnte Erklärung in Abbildung 3, die den Differenzenquotienten mit der Steigung der Sekantenfunktion in Verbindung bringt, indem entsprechende Zusammenhänge ausführlich mit Hilfe von Graphen und Termen erläutert werden. Weitere Lernende erklären auch, warum sich der Differenzenquotient auf ein Zeitintervall und der Differentialquotient auf einen Zeitpunkt bezieht, indem sie sich auf den Rechenhergang beziehen und dies im jeweiligen Kontext interpretieren.

3.3. Lernschwierigkeiten

Lernschwierigkeiten werden unter anderem durch Fragen sichtbar, die die Schülerinnen und Schüler selbst aufschreiben und zum Teil auch beantworten. In diesem Fall muss der Schreibende nicht selbst die Schwierigkeit gehabt haben, die ein Protagonist aufweist. Es kann auch sein, dass etwas im Unterricht bei



S1: Ich verstehe nicht wie du auf die Einheit kommst.

S2: Du dividierst ja den zurückgelegten Weg durch die benötigte Zeit. Daher die Einheit m/s.

S1: Ich verstehe es überhaupt nicht.

S2: Ich schreibe es dir auf. Die Rechnung lautet $\frac{5\cdot 4^2-5\cdot 1^2}{3}$. Wenn man die Rechnung oberhalb des Bruchstriches ausrechnet kommt man auf $\frac{75\,m}{3\,s}$.

Wenn du 75 durch 3 dividierst kommst du auf 25 aber wenn du Meter durch Sekunden dividierst bekommst du kein Ergebnis. Deshalb musst du m/s hinschreiben.

S1: Also steht der Bruchstrich bei m/s für eine Division?

S2: Genau.

Abbildung 4: Ausschnitt aus einem erdachten Dialog, bei dem erklärt wird, warum die Einheiten auf welche Weise gewählt werden.

anderen beobachtet wurde und im eigenen erdachten Dialog dann verarbeitet wird. Der zweite Fall, dass beide Protagonisten das gleiche Verständnisproblem aufzeigen und dies nicht gelöst wird, ist dagegen ein Zeichen dafür, dass der Schreibende selbst diese Lernschwierigkeit hat.

Eine in den erdachten Dialogen dieser Klasse häufig auftretende Lernschwierigkeit ist, dass das Wort „durchschnittlich“ oder „mittlere“ im Zusammenhang mit Änderungsraten oder im Anwendungskontext beispielsweise bei Geschwindigkeiten vergessen wird, wie in dem folgenden Dialogausschnitt zu lesen ist:

> „Man rechnet mit dem Differenzenquotienten die Veränderung der Wasserhöhe in Abhängigkeit von der Zeit aus. Das Wasser kann entweder steigen oder fallen.“

Im folgenden Dialogverlauf wird das ausgelassene Wort „durchschnittlich“ nicht erwähnt. In erdachten Dialogen anderer Lernender spricht dagegen ein Protagonist explizit an, dass das Wort „durchschnittlich“ nicht vergessen werden dürfe.

Weitere Lernschwierigkeiten sind, dass die gewählte Funktion nicht zum Anwendungskontext passt oder dass Funktionen im Anwendungskontext falsch interpretiert wurden, beispielsweise indem statt von der Weg-Zeit-Funktion von der Geschwindigkeitsfunktion gesprochen wird. Schließlich werden in den Dialogen begriffliche Ungenauigkeiten oder Verwechslungen sichtbar, beispielsweise, wenn von „absoluter Änderungsrate“ gesprochen wird. Der Lehrer selbst reagierte auf die in den erdachten Dialogen auftretenden Lernschwierigkeiten in der Form, dass er dieses Thema mehrfach wiederholen wollte, sowohl im Unterricht als auch in Schularbeiten.

3.4. Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler

Die schriftlichen Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler zu der Frage, was ihnen während des Schreibens des Dialoges bewusst geworden ist, waren überwiegend positiv. Von allen 73 abgegebenen Rückmeldungen aus vier Klassen benannten 84,4% der Schülerinnen und Schüler positive Effekte für das eigene Lernen. Aus der Klasse, die hier im Fokus ist, gab es keine negativen Rückmeldungen. Bei anderen Klassen dieses Projektes gab es durchaus Schülerinnen und Schüler, denen diese Art des Schreibens im Mathematikunterricht schwerfiel. Insbesondere äußerten manche, dass das Schreiben für sie mit keinem Lernzuwachs verbunden war. So schrieben beispielsweise zwei Lernende aus einer anderen Klasse der 11. Jahrgangstufe:

„Es dauert lange, aber es entsteht eine gute Zusammenfassung des Erlernten. Ich bevorzuge aber lieber andere Lernmethoden.“

„Ich finde es war relativ unnötig und dass ich mich gleich gut wie vorher auskenne.“

In der Klasse, die in diesem Artikel im Fokus ist, äußern sich die Schülerinnen und Schüler einerseits zum Erklären selbst, andererseits zum Verstehen: Einige beschreiben, dass ihnen durch das Schreiben des Dialogs bewusst geworden sei, was sie verstanden hätten oder was nicht, wie beispielsweise dieser Lernende:

„Mir persönlich hat die Aufgabe sehr weiter geholfen. Beim Schreiben dieses Dialoges habe ich nicht nur den ganzen Stoff bezüglich Differenzenquotient noch einmal wiederholt, sondern mir ist auch bewusstgeworden, dass ich manche Sachen nicht sehr gut erklären kann und manches noch nicht ganz verstehe.“

Weitere andere Themen waren, dass die Wiederholung oder Zusammenfassung des Stoffes als positiv empfunden wurde, dass sich das Verständnis verbessert habe oder Wissen verinnerlicht worden sei.

Beim Thema Erklären beschrieben manche, dass es ihnen geholfen habe, etwas in Worte zu fassen. Anderen sei bewusst geworden, wie schwer das Erklären sei. Dies ist in dieser Rückmeldung zu lesen:

„Während des Schreibens meines Anfangsdialoges ist mir bewusst geworden, wie schwer es eigentlich Lehrer haben. Es fiel mir schwer, das Thema verständlich zu erklären denn zwischen ein Thema verstehen und es erklären zu können, liegen Welten. Ein Beispiel hatte ich ziemlich schnell gefunden und auch eine Idee wie ich es am besten erklären kann aber ich konnte es nicht in Worte fassen.“

Es ist interessant zu lesen, dass dieser Lernende einen Unterschied macht zwischen „ein Thema verstehen“ und „es erklären zu können“. Eine mögliche Erklärung für diesen empfundenen Unterschied ist, dass das Bearbeiten einer Aufgabe zum Teil nur instrumentelles Verständnis erfordere, wohingegen relationales Verständnis in größerem Maße nötig ist, um Warum-Fragen erklären zu können. Ist das instrumentelle Verständnis stärker ausgeprägt als das relationale, kann ein Lernender beim Erklären von Warum-Fragen merken, dass das vorherige Wissen nicht ausreicht, und er könnte sagen: „Ich verstehe es (instrumentell), aber ich kann es nicht erklären (relational)“. Natürlich können die Schwierigkeiten im Erklären auch darin liegen, den Sachverhalt so in Worte zu fassen, dass ihn ein gedachtes Gegenüber gut versteht, selbst wenn dem Lernenden viele Zusammenhänge im Sinne des relationalen Verständnisses bereits bewusst sind.

Dass diese Methode zumindest bei dem folgenden Lernenden zu einem besseren Verständnis führen konnte, ist aus folgendem Kommentar zu entnehmen, in dem wieder ein Unterschied gemacht wird zwischen dem Lösen einer Aufgabe und dem Erklären:

„Eine Aufgabe selbst zu lösen, ist in den meisten Fällen viel einfacher, da man sich nicht so viele Gedanken darübermacht, doch wenn man sie jemandem anderen erklärt, muss man sich selbst viel intensiver damit auseinandersetzen, damit man Erklärungen parat hat. In den meisten Fällen versteht man dadurch die Aufgabe selbst besser. Ich habe also auch den Eindruck, dass ich beim Verfassen des Dialogs etwas dazugelernt habe.“

Hier kann es sein, dass das bessere Verständnis der Aufgabe, so wie oben beschrieben, daher kommt, dass durch den Prozess des Erklärens dem Lernenden Zusammenhänge klarer wurden.

4. Zusammenfassung

Die oben genannten Auswertungen zeigen, dass die Schülerinnen und Schüler mit den erdachten Dialogen angeregt wurden, sich in besonderem Maße mit Warum-Fragen zur Analysis zu beschäftigen, diese selbst zu stellen und zu beantworten. Betrachtet man Skemps Metapher des „mentalen Straßennetzes“, so bezogen sich die Warum-Fragen einerseits auf „Orte auf der Karte“ und deren Zusammenhang und andererseits auf das konkrete „Abschreiten von Wegen“. Die Erklärung der Schülerinnen und Schüler waren zum Teil wie Anleitungen im Sinne des instrumentellen Verständnisses zu lesen, andere konnten durch das Nennen von analytischen Zusammenhängen als Hinweise für relationales Verständnis aufgefasst werden. Lernschwierigkeiten, wie das Auslassen des Wortes „durchschnittlich" oder wenn Funktionen nicht zu den genannten Kontexten passten, wurden sichtbar und konnten auf diese Weise im folgenden Unterricht aufgegriffen werden.

Aus den Rückmeldungen der Schülerinnen und Schüler geht hervor, dass das Schreiben der erdachten Dialoge dazu anregen kann, sich bewusst zu werden, was verstanden wurde und was nicht und dass manche Lernende empfanden, dass sich ihr Verständnis verbessert habe. Das Erklären wurde einerseits als Schwierigkeit angesehen, häufig im Gegensatz zum Lösen von Aufgaben, andererseits wurde es aber auch als Chance für das eigene Lernen begriffen.

Zusammenfassend kann man sagen, dass erdachte Dialoge nicht für jeden Schüler oder jede Schülerin die Methode der Wahl ist, aber dass sie ein zusätzliches Instrument zum Diagnostizieren des Lernstandes jedes einzelnen und zum Vertiefen analytischer Zusammenhänge sein können.

Literatur

Danckwerts, R., & Vogel, D. (2006): *Analysis verständlich unterrichten*. München: Spektrum Akademischer Verlag.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994): Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. In: *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (2), 116–140.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986): Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. In: J. Hiebert (Ed.): *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (S. 1–27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Koch, P., & Österreicher, W. (1985): Sprache der Nähe – Sprache der Distanz. Mündlichkeit und Schriftlichkeit im Spannungsfeld von Sprachtheorieund Sprachgeschichte. In: O. Deutschmann et al. (Hrg.): *Romanistisches Jahrbuch* (Vol. 36, S. 15–43). Berlin/New York: Walter de Gruyter.

Mayring, P. (2010): *Qualitative Inhaltsanalyse, Grundlagen und Techniken*. Weinheim/Basel: Beltz Verlag.

Skemp, R. R. (1976): Relational Understandning and Instrumental Understanding. In: *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

Sfard, A. (2008): *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.

Weigand, H.-G. (2015): Begriffsbildung. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 255–278). Berlin/Heidelberg: Springer.

Wille, A. M. (2008): Aspects of the concept of a variable in imaginary dialogues written by students. In: O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepúlveda (Eds.): *PME32, vol. 4* (S. 417–424). Cinvestav-UMSNH, Mexico.

Wille, A. M. (2009): Selbst erdachte Dialoge. In: *mathematik lehren*, Heft 156, Oktober 2009, 22–26.

Wille, A. M. (2017a): Imaginary Dialogues in Mathematics Education. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 38(1), 29–55.

Wille, A. M. (2017b): Mathe-Gespräche schreiben – Anfänge für erdachte Dialoge entwerfen. In: *mathematik lehren*, Heft 205, Dezember 2017, 31–34.

Anschrift der Verfasserin

Annika M. Wille

Institut für Didaktik der Mathematik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Sterneckstraße 15
A – 9010 Klagenfurt
Österreich

annika.wille@aau.at